TIGHT BINDING BOOK

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಪ್ರಚಾರಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ - ೩೩

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸ್ವರೂಪ

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್, ಡಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.



ಶ್ರೀ ಪಂಚಾಚಾರ್ಯ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಿಕ್ ಪ್ರೆಸ್

ಮೈಸೂರು

೧೯೪೨

ಮೊದಲನೆಯ ಮುದ್ರಣ—೧೫೦೦ ಪ್ರತಿಗಳು
೧೨-೩-೧೯೪೨

ಮುನ್ನುಡಿ

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಮೊದಲನೆಯ ಚಾನ್ಸಲರವರಾದ ಆಳಿದ ಮಹಾಸ್ವಾಮಿಯವರಾದ ಶ್ರೀ ಕೃಷ್ಣರಾಜ ಒಡೆಯರ್ ಬಹದೂರ್ ಅವರು ಮೊದಲನೆಯ ಸೆನೆಟ್ ಸಭೆಯ ಪ್ರಾರಂಭೋತ್ಸವದ ಭಾಷಣದಲ್ಲಿಯೂ, ಪುನಃ ಮೊದಲನೆಯ ಕಾನ್ವೊಕೇಷನ್ ಮಹೋತ್ಸವದ ಭಾಷಣದಲ್ಲಿಯೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪಾಲಿಗೆ ಹಲವು ಕರ್ತವ್ಯಗಳನ್ನು ಅಪ್ಪಣೆಮಾಡಿದರು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದವು ಇವೆರಡು: ಒಳ್ಳೆಯ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪ್ರಕಟನೆ, ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡ ಸಾಹಿತ್ಯಕ್ಕೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ. ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮನ್ಮಹಾರಾಜರವರ ಪ್ರಜೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾರು ಕಾರಣಾಂತರಗಳಿಂದ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಶಿಕ್ಷಣ ಶಿಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಕೂಡಲು ಶಕ್ತರಲ್ಲವೋ ಅಂಥವರಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನಪ್ರಸಾರ ಮಾಡುವುದು; ಅಲ್ಲದೆ ಮೈಸೂರು, ಬೆಂಗಳೂರು ಈ ಎರಡು ಹಿರಿಯ ಪಟ್ಟಣಗಳಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಾನುಕೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿಲ್ಲದ, ಸಂಸ್ಥಾನದ ದೂರ ದೂರ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಜನರಲ್ಲಿ ಉಚ್ಚ ವರ್ಗದ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಹರಡುವುದು.

ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಸ್ಥಾಪಿತವಾದಂದಿನಿಂದಲೂ ಈ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಧ್ಯೇಯಗಳನ್ನು ತನ್ನ ಮುಂದೆ ತಪ್ಪದೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಅದರ ಕನ್ನಡ ಪ್ರಕಟನ ಶಾಖೆಯು ಕೆಲವು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಹಳಗನ್ನಡ ಕಾವ್ಯಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ ಅಚ್ಚುಹಾಕಿಸಿವೆ; ಅಲ್ಲದೆ, ಸಾಹಿತ್ಯ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಕೆಲವು ಲಘು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಹೊರತಂದಿದೆ. ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ಸಮಿತಿಯವರು ಸಂಸ್ಥಾನದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳ ಅನೇಕ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೇ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಇತ್ತೀಚಿಗೆ ಒಂದು ಫಲದಾಯಕವಾದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಬೆಳೆದು ಬರುತ್ತಿದೆ. ವಿಷಯ ಒಂದೊಂದಕ್ಕೆ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಬಿಡಿ ಉಪನ್ಯಾಸ

ವನ್ನು ಕೊಡಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧ್ಯಾಪಕ ಸಂಘದ ಸಹಕಾರದಿಂದ ಸಂಸ್ಕೃತಿಸಪ್ತಾಹಗಳೆಂದು ಈಗಾಗಲೇ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವ ಉಪನ್ಯಾಸಮಾಲೆಗಳನ್ನು ನಡಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಒಂದೇ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಐದಾರು ದಿನ ಭಾಷಣ ಕಾವ್ಯವಾಚನ ಸಂಗೀತಾದಿಗಳು ಜರುಗುತ್ತವೆ: ಉಪನ್ಯಾಸಗಳು ಸಾಹಿತ್ಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಮಾಜವೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಪ್ತಾಹಗಳು ನೆರವೇರಿದ ದೊಡ್ಡಬಳ್ಳಾಪುರ, ದಾವಣಗೆರೆ, ಕೋಲಾರ ಮುಂತಾದ ಎಲ್ಲ ಕಡೆಗಳಿಂದಲೂ ಅವಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಮನ್ನಣೆ ದೊರೆತಿದೆ.

ಈಗ ಅತಿ ಹೊಸದಾದ ಪರ್ಯಾಡಾಪ್ರಪಂಪರೆ: ಒಂದೆರಡು ಊರುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು, ಅಲ್ಲಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಬಾರಿ ಹೋಗಿ, ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನೂ ಕುರಿತು ನಾಲ್ಕಾರು ಉಪನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಯೋಜನೆ. ಆದರಿಂದ ಆ ಊರುಗಳ ಜನರಿಗೆ ಅನಲ್ಪಕಾಲ ಎಡೆಬಿಡದೆ ಜ್ಞಾನಬೋಧೆ ಸಿಕ್ಕುವುದು. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಪಡೆದ ಸಭಿಕರ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಆಚೆಗೂ ಕೂಡ ಈ ಭಾಷಣಮಾಲೆಗಳ ಪ್ರಯೋಜನ ಹರಡಲೆಂಬ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಚಿಕ್ಕಹೊತ್ತಗೆಗಳಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದೆ.

ಆಳಿದ ಘನ ಪ್ರಭುಗಳವರು ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಕ್ಕೆ ಎರಡು ಪವಿತ್ರ ಕರ್ತವ್ಯಗಳನ್ನು ನೇಮಿಸಿದರಷ್ಟೆ: ಸುಲಭ ಸಮಂಜಸ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಗ್ರಂಥಗಳ ಪ್ರಕಟನೆ; ಜನತೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಬಗೆಯ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಪ್ರಸಾರ. ಆ ಎರಡು ಕರ್ತವ್ಯಗಳನ್ನೂ ಈ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಒಂದೇಸಾರಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೆಂಬುದೇ ಹೀಗೆ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಲಘು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದವರ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ಹೆಬ್ಬಯಕೆ.

ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಮೈಸೂರು,
೧೫—೮—೧೯೪೦.

ಎನ್. ಎಸ್. ಸುಬ್ಬರಾವ್

ಪೀಠಿಕೆ

" ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸ್ವರೂಪ " ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಬರೆಯಬಹುದು. ಕೇವಲ ಸುಲಭ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ತಿಳಿಸಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೆ ಗಹನವಾದ ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಜಿಜ್ಞಾಸಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹದು. ಆದರೆ, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಜನಸಾಮಾನ್ಯದ ಗಣಿತ ಜ್ಞಾನವು ಕೆಳಮಟ್ಟದ್ದಾದುದರಿಂದಲೂ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು ವಿರಳವಾಗಿರುವುದರಿಂದಲೂ ವಿಷಯವನ್ನು ಬೆಳಸುವುದು ಬಹಳ ಪ್ರಯಾಸ. ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧವಾದ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯಶಃ ಇದೇ ಮೊದಲನೆಯದು. ನಮ್ಮ ಜನಗಳ ಜ್ಞಾನಾರ್ಜನೆಯು ಹೆಚ್ಚಿದ ಹಾಗೆಲ್ಲಾ ಇಂಥ ಗ್ರಂಥಗಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಹೇರಳವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಬರುವುವು ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಸಂಶಯವಿಲ್ಲ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುತ್ತೇನೆ. ಕೆಲವೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳಿಗೆ ಇತರರು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಶಬ್ದಗಳು ನನ್ನ ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಸರಿಬಾರದ ಕಾರಣ, ಬೇರೆ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತೇನೆ. ಎಲ್ಲಾ ಗ್ರಂಥಕರ್ತರೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ನಿರ್ಬಂಧಕ್ಕೊಳಗಾಗುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು. ಅಧಿಕಾರ ವರ್ಗದವರು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡಬೇಕೆಂಬ ಸಲಹೆಯನ್ನು ನಮ್ರತೆಯಿಂದ ಮುಂದಿಡಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇನೆ. ಈ ಗ್ರಂಥವು ಕನ್ನಡಿಗರ ಮೆಚ್ಚುಗೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಎಂದು ನಂಬುತ್ತೇನೆ.

ಇಂಜನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜು,
ಬೆಂಗಳೂರು.
ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ವಿಷಯಾನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸ್ವರೂಪ

೧. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

೧. ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ, ನಾಗರಿಕತೆಯ ಆದಿಯಲ್ಲಿ, ಪದಾರ್ಥಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯು ತಲೆದೋರಿ, ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದ ಸಂಕೇತಗಳು ಸೃಷ್ಟಿಯಾದಾಗ ಗಣಿತವೂ ಹುಟ್ಟಿತು ಎನ್ನಬಹುದು. ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು, ಮನುಷ್ಯನ ಬೆರಳುಗಳಿಂದ ತಿಳಿಸಬಹುದಾದ ಸಣ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ,ಕ್ರಮೇಣ ಹತ್ತು, ನೂರು ಮುಂತಾದ ಹೆಚ್ಚುಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನೂ ಅವುಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಉಪಾಯುಗಳನ್ನೂ ಜನರು ಅರಿತುಕೊಂಡರು. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ 43 ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಎರಡು ಕೈಗಳನ್ನೂ ನಾಲ್ಕುಸಲ ತೋರಿಸಿ, ಆಮೇಲೆ ಒಂದು ಕೈಯ ಮೂರು ಬೆರಳುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈಗಲೂ, ನಮ್ಮ ಮನೆಗಳಲ್ಲಿ ಬೆರಣಿಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿದರೆ, ಈ ಉಪಾಯಗಳ ಒಂದು ಮಾದರಿ ದೊರಕುವುದು. ಬರವಣಿಗೆ ಆರಂಭವಾದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರು. ರೋಮ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದುವಕ್ಕೆ I, II, III ಮೊದಲಾದ ಸಂಕೇತಗಳು ಉಂಟಾದುವು; ಈ ಗುರುತುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಈಗಲೂ ಗಡಿಯಾರಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುತ್ತವೆ. ಹಿಂದೂದೇಶದವರು ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರ ವರೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಜೊತೆಗೆ ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ

ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಏರ್ಪಡಿಸಿದರು. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಹತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನೇ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಮಾಡಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಎಂದರೆ, ಈಗ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಏಕ, ದಶಕ, ಶತಕ (ಬಿಡಿ, ಹತ್ತು, ನೂರು) ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರು. ಕೂಡುವುದು, ಕಳೆಯುವುದು, ಗುಣಕಾರ ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಈ ವಿಧಾನವು ಬಹಳ ಉಪಯೋಗವಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದುದರಿಂದ, ಇದು ಅರಬ್ಬೀ ದೇಶದವರ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಕ್ರಮೇಣ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ದೇಶಗಳಿಗೆ ಹರಡಿ, ಎಲ್ಲರೂ ಇದನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿದರು. ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿಕೊಂಡು ಎಲ್ಲಾ ದೇಶದವರೂ ಹಿಂದೂಗಳ ಗಣಿತಕ್ರಮವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅನುಸರಿಸಲಾರಂಭಿಸಿದರು. ರೋಮ್ ದೇಶದವರ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಹಿಂದೆಬಿದ್ದು ಕೇವಲ ಅಲಂಕಾರಕ್ಕಾಗಿಯೂ, ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದು ಮುಂತಾದ ಕ್ರಮನಿರೂಪಣೆಗಾಗಿಯೂ ಉಪಯೋಗ ಹೊಂದತೊಡಗಿದುವು.*

ನಾಗರಿಕತೆಯು ಬೆಳೆಯುತ್ತಾ ಬಂದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು, ಒಂದರಲ್ಲೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು, ಮುಂತಾದುವುಗಳು ಆವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡತಕ್ಕ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು

---

*ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ರೋಮನರ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತವು ಎಷ್ಟು ಕಷ್ಟವಾಗುವುದೆಂಬ ವಿಷಯವಾಗಿ ಶ್ರೀಮಾನ್ ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರಿಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿರುವ 'ಸಂಖ್ಯೋದ್ಯಾನ' (ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಚಾರಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ, ನಂ. 23) ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಓದಬಹುದು.

ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಆಮೇಲೆ ಗುಣಕಾರ, ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಗುಣಕಾರಮಾಡಲು ಮಗ್ಗಿಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಭಾಗಹಾರ ಮುಂತಾದುವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಏರ್ಪಟ್ಟು ಅಂಕಗಣಿತವು ಬೆಳೆಯಿತು. ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ.

೨. ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ **ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** (Natural Numbers) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮನುಷ್ಯನ ಬುದ್ಧಿಗೆ ಸ್ವಭಾವವಾಗಿ ಸ್ಫುರಿಸತಕ್ಕವುಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಇವುಗಳನ್ನು ದೈವನಿಯಾಮಕವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದೆ ಮನುಷ್ಯನಿರ್ಮಿತಗಳಾದ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ವಿಧವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನೂ ಆವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವುದೇ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು (fractions). ಒಂದನ್ನು ಎರಡುಭಾಗ ಮಾಡುವಿಕೆ, ನಾಲ್ಕನ್ನು ಐದುಭಾಗಮಾಡುವಿಕೆ ಇತ್ಯಾದಿಯಾದ ವಿಭಜನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟುವು; ಅಲ್ಲದೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು, ಗುಣಿಸುವುದು ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಗೆ ವಿಧಾನಗಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟುವು. ವಾಚಕರಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಎಂದಕೂಡಲೆ, ದಶಮಾಂಶಗಳೆಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಒಡನೆಯೇ ಜ್ಞಾಪಕಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಅರ್ಧ, ಕಾಲು ಮುಂತಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದೂ, ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರು

ವುದೂ ವಾಚಕರಿಗೆಲ್ಲಾ ತಿಳಿದಿರತಕ್ಕ ವಿಷಯ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಇಷ್ಟುಮಾತ್ರ: ದಶಮಾಂಶಗಳೆಂಬುವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೂಪಾಂತರಕ್ಕೆ ತಂದು ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಹೊರತು, ಅವು ಇನ್ನೊಂದು ಹೊಸ ನಮೂನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನೂ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದು ಬೇರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿಚಾರಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

೩. ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Negative numbers). ಮೊದಲು, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಒಂದೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದು, ಆಮೇಲೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗಣಿತದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದ ಹೇಗೆ ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಸಾಲ ವಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಾಲವನ್ನು—100 (ಮೈನಸ್ ನೂರು) ರೂಪಾಯಿಗಳ ಆಸ್ತಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಪದಾರ್ಥವನ್ನು 10 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡು 8 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಮಾರಿದರೆ, ಎರಡುರೂಪಾಯಿ ನಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, —2 (ಮೈನಸ್ ಎರಡು) ರೂಪಾಯಿಗಳ ಲಾಭ ಬಂತು ಎಂದು ಹೇಳೋಣ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೇನು, ಅವುಗಳನ್ನು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಏನು ಉಪಯೋಗ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಹಾರದ ಕಡೆಗೆ ಗಮನಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ;

ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ, ಪ್ರಾಪಂಚಿಕ ಉಪಯೋಗ ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಗೆ ನಾವು ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ದೊಡನೆ, ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಗಳನ್ನು ಯಾವ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಾದರೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆ? ಎಂದರೆ ಯಾವ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾದರೂ ಕೂಡಬಹುದೆ, ಒಂದರಲ್ಲೊಂದನ್ನು ಕಳೆ ಯಬಹುದೆ, ಒಂದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಗುಣಿಸಬಹುದೆ, ಇತ್ಯಾದಿ. ಕೂಡುವುದಕ್ಕೂ ಗುಣಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಯಾವ ತೊಂದರೆಯೂ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಕಳೆಯುವ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳಿಂದಲೇ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, 3 ರಲ್ಲಿ 4 ನ್ನು ಕಳೆ ಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಧ್ಯೇಯ ಅಥವಾ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶವೇನೆಂದರೆ, **ಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸಾಧ್ಯವಾದಮಟ್ಟಿಗೂ ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕಗಳಾಗಿರಬೇಕು,** ಎಂದರೆ ಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಎಲ್ಲೆಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಜರುಗಿಸಲು ಅಡಚಣೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆಯೋ, ಅಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೋ ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳನ್ನೋ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಈ ಪ್ರತಿಬಂಧಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಲು ಪ್ರಯತ್ನಪಡುವುದೇ ಗಣಿ ತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಗುಣವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಹೇರಳವಾಗಿವೆ. ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ, 3 ರಲ್ಲಿ 4 ನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ದೋಷವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯೆಂಬ ಹೊಸಭಾವನೆ

ಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ, 3−4=−1 ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿ, 3 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 4 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚುಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, 1 ರೂಪಾಯಿ ಸಾಲ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ವರ್ಣಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು** ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕೇ ಹೊರತು, ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ನಿದರ್ಶನಗಳು ನಮಗೆ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ.

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯು ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯಾವರ್ಗವು ದ್ವಿಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ—

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{8}, 4\tfrac{1}{2}, \ldots$$

$$0, -1, -2, -3, \ldots, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}, \ldots$$

ಸೊನ್ನೆಗೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆಯೇ, ಅಥವಾ $+0=-0$. ಮೇಲಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು** (Positive numbers) ಎಂದು ಆಗಾಗ್ಗೆ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

೪. ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಮೇಲೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ತಕ್ಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳು ಒಡನೆಯೇ ಗೋಚರವಾಗು

ತ್ತವೆ. ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಕೂಡಬಹುದು ಉದಾ: $4+3=3+4$. ಕಳೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕ್ರಮವನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಾಸಪಡಿಸಿದರೆ, ಫಲಿತಾಂಶವು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ: $4-3=1$. $3-4=-1$. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ (ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲಿ) ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ, ಎಂದರೆ a ಮತ್ತು b ಎಂಬುವು ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ,

$$a+b=b+a$$
$$a-b=-(b-a)$$

ಎಂಬ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇವು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

$$-100+150=150-100=50$$
$$-10+8=8-10=-2$$
$$-10-8=-18$$
$$10-(-8)=-8-10 \text{ ಎಂಬುದರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ}$$
$$=18$$

ಎಂದರೆ. $a-(-b)=a+b$, ಇತ್ಯಾದಿ

ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕದೃಷ್ಟಾಂತಗಳಿಂದ ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು, ಉದಾ: ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನಿಗೆ ಒಂದು ದಿನ ಹತ್ತು ರೂಪಾಯಿ ಸಂಪಾದನೆಯಾದ ಮೇಲೆ ಎಂಟು ರೂಪಾಯಿ ಸಾಲವೂ ತೀರಿದರೆ, ಆ ದಿವಸ ಅವನ ಒಟ್ಟು ಸಂಪಾದನೆ

$=18$ ರೂಪಾಯಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನ ಸಂಪಾದನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು: $10-(-8)=18$.

ಇನ್ನು ಗುಣಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಹಾರ. ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅನೇಕಾವರ್ತಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೇ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಕೂಡುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಗುಣಕಾರವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ: $12\times 4=12+12+12+12=48$.

ಹಾಗಾದರೆ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು ಹೇಗೆ? 12×-4 ಎಂದರೆ ಅರ್ಥವೇನು? ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾದ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ, ನಾವು ಸೂಕ್ತವಾದ ಅರ್ಥವೊಂದನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕು. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ,

$$a\times b=b\times a$$

ಎಂಬುದು ಸಹಜವಷ್ಟೆ. ಈ ನಿಯಮವು ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಒಪ್ಪಂದಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅನಂತರ, $12\times -4= -4\times 12$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಬಲಗಡೆ ಇರುವುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುಣಿಸಬಹುದು, $-4\times 12=-4-4-\ldots$ (ಹನ್ನೆರಡು ಸಲ) $=-48$. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಗುಣಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಉಂಟಾಯಿತು. ಇನ್ನು, ಎರಡು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. -5×-4 ಎಂಬುದು -5×4 ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಸಹಜವಾಗಿ ತೋರುವ ನಿಯಮ. ಎಂದರೆ,

$$-5 \times -4 = -5 \times 4 \text{ ಎಂಬುದರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ}$$
$$= -20 \text{ ರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ} = +20.$$

ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾದರೂ ಗುಣಿಸಲು, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಧಾನಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\begin{array}{ccccc} + & \times & + & = & + \\ - & \times & + & = & - \\ + & \times & - & = & - \\ - & \times & - & = & + \end{array}$$

ಇವುಗಳಿಂದ, ಭಾಗಹಾರದ ನಿಯಮಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ ; ಏಕೆಂದರೆ ಭಾಜಕವನ್ನೂ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಭಾಜ್ಯ ಬರಬೇಕು.

ಉದಾ : $-5 \times -4 = 20$ ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{20}{-4} = -5$.
$-5 \times 4 = -20$ ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{-10}{-5} = +4$, $\frac{-20}{4} = -5$.

೫. ವ್ಯವಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದೆವು. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ, ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಹಾರದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದೆವು. ಆದರೆ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಾದರೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಮವು ಈ ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಗುಣಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, **ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ**

ಯನ್ನೂ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 5÷0 ಇದರ ಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 5 ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ವಿಚಾರಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ, ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಬರಬೇಕೆಂಬುದು ಇದರ ಸಹಜ ಗುಣ. ಆದ್ದರಿಂದ 5÷0 ಎಂಬುದಕ್ಕೆ **ಯಾವ** ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ.*

೬. ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** (Rational numbers) ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. a ಮತ್ತು b ಎಂಬುವು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕ (ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ) ಗಳಾದರೆ, $\frac{a}{b}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಇವುಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾ: $\frac{2}{1}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{-4}{5}$. ಇನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೇ, ಅಥವಾ ಅಂತಹ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಮಾಡುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡೋಣ.**

$2\times2=4$, ಆದ್ದರಿಂದ 4 ರ ವರ್ಗಮೂಲ$=2$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ, $\sqrt{4}=2$,

---

*** $5\div0=\infty$ (ಅನಂತ, infinity) ಎಂದು ಬರೆಯುವುದುಂಟು. ಇದರ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಅನಂತ ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬಹುದು.**

$\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, ಇತ್ಯಾದಿ. $2\times2\times2=8$ ಎಂಬುದನ್ನು $\sqrt[3]{8}=2$ ಎಂದು ಬರೆದು 8 ರ ಘನಮೂಲ$=2$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $\sqrt[3]{27}=3$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ವರ್ಗಮೂಲ ಅಥವಾ ಘನಮೂಲಗಳು ಇವೆಯೋ ? 2ರ ವರ್ಗಮೂಲವೆಷ್ಟು ? ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೆ 2 ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳೋಣವೇ, ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ನಾಮಕರಣ ಮಾಡೋಣವೇ ? ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದು ಸೂಕ್ತವಾದುದು, ಅದು ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಿಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವುವು :

$(1.4)^2$, ಎಂದರೆ $1.4 \times 1.4 = 1.96$

$(1.41)^2 = 1.9881$

$(1.414)^2 = 1.999396$

$(1.4142)^2 = 1.99996164$

$(1.5)^2 = 2.25$

$(1.42)^2 = 2.0164$

$(1.415)^2 = 2.002225$

$(1.4143)^2 = 2.00024449$

ಈ ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ತೋರುವುದೇನೆಂದರೆ : 2ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ

ವರ್ಗಮೂಲವು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಬೇಕು. ಅದು 1. 4 ಮತ್ತು 1. 5 ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ, 1. 41 ಮತ್ತು 1. 42 ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ, ಇತ್ಯಾದಿ ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ,

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

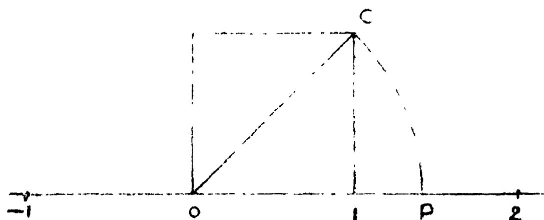
ತಾಳ್ಮೆಯಿಂದ ಇನ್ನೂ ಮುಂದಿನ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಕೊನೆಗಾಣುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಧವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಡ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, " ಸಂಖ್ಯೆಗೆ " ಎಷ್ಟು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ (ವಾಡಿಕೆ ಯಾದ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ) ಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವು ದನ್ನೂ ಕೂಡ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಹೊಸ ಮಾದರಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** (irrational numbers) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

೭. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಮೇಲೆ O ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದನ್ನು

ಮೂಲಬಿಂದು (origin) ವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ. ರೇಖೆಯಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಎಡಗಡೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ತೋರಿಸಬಲ್ಲುವು. O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಗುಲಕ್ಕೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{7}$ ಮುಂತಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ, O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಗಡೆಗೆ, ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಕೂಡ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, O1 ರೇಖೆಯಮೇಲೆ, ಒಂದು ಚಚ್ಚೌಕವನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳ ನಡುವೆ



ಇರುವ ದೂರ $=\sqrt{2}$ ಅಥವಾ $OC \times OC = 2$ ಎಂದು ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. (ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರಲ್ಲಿ ಈ

ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ). ಆದ್ದರಿಂದ, O ಬಿಂದು ವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟು, OC ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಆ ವೃತ್ತವು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ P ಬಿಂದು ವಿಗೂ O ಬಿಂದುವಿಗೂ ಇರತಕ್ಕ ದೂರ $=\sqrt{2}$. ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಮೊದಲಾದ ಇತರ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸರಳರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸ ಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಎರಡು ವಿಧದ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳನ್ನೂ ಅನೇಕಾನೇಕವಾಗಿ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ಒಂದೇ ವಿಧದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಉದಾ : ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು), ಅನಂತವಾಗಿ ದ್ದರೂ ಕೂಡ, ರೇಖೆಯನ್ನು ತುಂಬಲಾರವು. ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಸಹಜವಾಗಿ ಏಳುತ್ತವೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿವೆಯೋ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿವೆಯೋ ? ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆ ಅಥವಾ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳಿರಬಹುದು ? ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಿದೆಯೇ ? ಸ್ಥಳಸಂಕೋಚದಿಂದಲೂ ವಿಷಯವು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣವಾದ್ದರಿಂದಲೂ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಉತ್ತರವನ್ನು ವಿವ ರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ವಾಚಕರಿಗೆ ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕುತೂಹಲ ಉಂಟಾಗಿ, ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ವಿಚಾರಮಾಡಿ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಅವರೇ ಒದಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವರೆಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಎಂದರೆ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ದಪ್ಪ ಇವು ಯಾವುವೂ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ವಿಷಯ ಎಂದು ವರ್ಣಿಸುವ ವಾಡಿಕೆ. ಈ ಶೂನ್ಯಗುಣಗಳಿಂದ

ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಬದಲಾಗಿ ಬಿಂದು ಎಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುರೂಪದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತೇವೆ, ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ, ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಒಂದು ಅನ್ಯೋನ್ಯಸಂಬಂಧವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದ ಹಾಗಾಗುತ್ತದೆ.

೮. ಇದುವರೆಗೂ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿ **ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳು**(Real Numbers) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಏಕೆಂದರೆ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತವೆ. ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡಿದಂತೆಯೇ, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಕೂಡ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{-1}$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಾಸ್ತವ ಅಥವಾ ಊಹಾಜನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (imaginary numbers) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\sqrt{-1}=i$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $i \times i = -1$, $2i \times 2i = -4$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ವಿಚಿತ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೇವಲ ವಿನೋದಕ್ಕಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ. ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಇವು ಬಹಳ ಉಪಯೋಗಕಾರಿಗಳಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿರುವುದಲ್ಲದೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆಯೇ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಶಾಖೆಯು ಬೆಳೆದಿದೆ. ಸ್ಥಳಸಂಕೋಚದಿಂದ, ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿಗೇ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

೨. ಬೀಜಗಣಿತ

೯. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ನಾನಾವಿಧವಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಆಚರಿಸುತ್ತೇವಷ್ಟೆ. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು. ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನೋ ಕೆಲವನ್ನೋ ಕುರಿತು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, $a. b, c, x, y$ ಮುಂತಾದ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾ: ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ x ಪುಟಗಳಿವೆ ಎಂದಾಗ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ಸಂಖ್ಯೆ, ಒಂದು ರೈಲು ಗಾಡಿಯ ವೇಗವು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ v ಅಡಿಗಳು ಎಂದಾಗ, v ಎಂಬುದು ಕ್ಷಣ ಕ್ಷಣಕ್ಕೂ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಿರಬಹುದು.

ಅಂಕಗಣಿತದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಯಾವರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು, ಹಾಗೆ ಬರೆದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಬೆಳೆಸುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು, ಹಾಗೆ ಬೆಳೆಸುವಾಗ ಯಾವ ಯಾವ ಹೊಸ ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳು ತಲೆದೋರಿ ಪ್ರಚಾರಕ್ಕೆ ಬಂದಿವೆ, ಇವೇ ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡತಕ್ಕ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ **ಬೀಜಗಣಿತ** (algebra) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದೆರಡು

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲೇ ತಿಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಅವು ಯಾವು ವೆಂದರೆ,

$$a+b=b+a$$
$$a\times b=b\times a$$

$a\times b$ ಎಂಬುದನ್ನು ab ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. 2×3 ಎಂಬುದನ್ನು 23 ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಆವಶ್ಯ ಕವಾದಾಗ, ದಶಮಾಂಶವೆಂಬ ಶಂಕೆಯು ಬಾರದ ಸಂದರ್ಭ ಗಳಲ್ಲಿ, 2·3 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. 1.2.3.4.5 ಎಂದರೆ $1\times 2\times 3\times 4\times 5$ ಅಥವಾ 120.

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು, $ab=ba$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $a\,(b+c)$ ಎಂದರೆ, b ಮತ್ತು c ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು a ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈಗ $2\times(3+5)=2\times 8=16$. ಇದನ್ನು ಎರಡುಭಾಗವಾಗಿ ಒಡೆದು 2×3 ಮತ್ತು 2×5 ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a(b+c)=ab+ac$$

ಎಂಬ ನಿಯಮವು ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿಸ್ತ ರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ವಿಷಯವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಮೈಸೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಒಂದು ಮದುವೆಗೋಸ್ಕರ 8 ಜನಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಸಾರವು ಬೀಗರ ಕಡೆಯವರಾದ 4 ಜನಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ಖರ್ಚಿನಿಂದಲೇ ಕರೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆಗತಕ್ಕ ಖರ್ಚು ಈ

ರೀತಿ ಇದೆ; ಪ್ರತಿ ಒಬ್ಬರಿಗೂ ಮೈಸೂರಿಂದ ಬೆಂಗಳೂರಿಗೆ ಟಿಕೀಟು ಮತ್ತು ಇತರ ಖರ್ಚು ಸೇರಿ, ತಲಾ 2 ರೂಪಾಯಿ, ಬೆಂಗಳೂರಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ತಲಾ 6 ರೂಪಾಯಿ, ಆದ್ದರಿಂದ

ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು $= (8+4) \times (2+6)$

$= 12 \times 8 = 96$ ರೂಪಾಯಿ.

ಇದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು.

ಮೈಸೂರಿಂದ ಬೆಂಗಳೂರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಖರ್ಚು

$= 8 \times 2 = 16$ ರೂ.

,, ,, ಬೀಗರಿಗಾಗಿ $= 4 \times 2 = 8$ ರೂ.

ಬೆಂಗಳೂರಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ನಮ್ಮ ಖರ್ಚು $= 8 \times 6 = 48$ ರೂ.

,, ,, ಬೀಗರಿಗಾಗಿ $= 4 \times 6 = 24$ ರೂ.

ಒಟ್ಟು $= 96$ ರೂ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 8, 4, ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದೇ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 8, 4, ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ a, b ಎಂದೂ 2, 6 ಎಂಬವಕ್ಕೆ c, d ಎಂದೂ ಬರೆದರೆ, ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮವು ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd.$$

ಹೀಗೆಯೇ ಇನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ,

$$(a+b+c)(d+e+f) = ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf.$$

ಮುಂತಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ a, b, c, ಮೊದಲಾದುವು ಧನಸಂಖ್ಯೆ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲಾದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾದರೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ನಿಯಮದಿಂದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. $(a+b)(a+b)$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ $(a+b)^2$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ $a\times a=a^2$.

ಈಗ $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$
$=a^2+2ab+b^2$

ಹೀಗೆಯೇ, $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab$
$-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

ಮತ್ತು $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

(ಈ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ, $-\times-=+$, $+\times-=-$ ಮುಂತಾದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿರಬೇಕು.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2$$

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಸೂಚಿಸುವುವು.

$$498 \times 502 = (500-2)(500+2)$$
$$= (500)^2 - 2^2 = 250000 - 4$$
$$= 249996$$

$$498 \times 498 = (500-2)^2$$
$$= 500^2 - 2.500.2 + 4$$
$$= 250004 - 2000 = 248004$$

ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ನಿಯಮಗಳು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಂಕೇತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆದು, ಪುನಃ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೇ ಹೇಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಬಲ್ಲವು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳೂ ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಹೇರಳವಾಗಿವೆ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ವರ್ಣಿಸತಕ್ಕ ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾದುವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

೧೦. ಈಗ ಘಾತ (power) ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ತಿಳಿಸಿ, ಘಾತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಡುವ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವಿಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. $a \times a$ ಎಂಬುವಕ್ಕೆ a^2 ಎಂದು ಬರೆಯುವಂತೆಯೇ, $a \times a \times a = a^3$, $a \times a \times a \times a = a^4$ ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ, a^2b^3 ಎಂದರೆ $a \times a \times b \times b \times b$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 2, 3, 4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಘಾತಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. a ಯ ಘಾತವೆಂದರೆ, a ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವು ಎಷ್ಟುಸಲ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗ, $a^5 \times a^3 = (a \times a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a)$
$= a^8$

$$a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^2.$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ಎಂಬ ನಿಯಮಗಳು ತೋರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, ಇಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಎಂಬುವು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ ನಾವು ಘಾತಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{2\frac{1}{2}}$ ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಗೆ ಏನಾದರೂ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದೇ, ಎಂದರೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಘಾತಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಯಾವ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ, ಎಂದು ವಿಚಾರಮಾಡೋಣ. ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸರ್ವ ವ್ಯಾಪಕವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಹೇಗೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಸಂದರ್ಭವು ಪುನಃ ನಿದರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಘಾತನಿಯಮಗಳು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕಗಳಾಗಬೇಕು ಎಂದು ನಿರ್ಧಾರಮಾಡೋಣ. ಎಂದರೆ, m ಮತ್ತು n ಎಂಬುವು ಯಾವ ತರಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಕೂಡ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಒಪ್ಪಂದಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ,

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

$$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{1}$ ಅಥವಾ a.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ ಅಥವಾ a ಯ ವರ್ಗಮೂಲ.

ಹೀಗೆಯೇ, $a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a$, ಅಥವಾ $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ $=a$ ಯ ಘನ ಮೂಲ.

$a^{2\frac{1}{2}}=a^{2}\times a^{\frac{1}{2}}=a\times a\times\sqrt{a}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

$a^{m-m}=a^{0}=\frac{a^{m}}{a^{m}}=1.$ ಆದ್ದರಿಂದ, $a^{0}=1.$

$a^{m}\times a^{-m}=a^{m-m}=a^{0}=1.$ ಆದ್ದರಿಂದ, $a^{m}=\frac{1}{a^{m}}.$

ಈಗ ಋಣಘಾತಗಳಿಗೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಘಾತಗಳಿಗೂ ಅರ್ಥವು ಏರ್ಪಟ್ಟ ಹಾಗಾಗುತ್ತದೆ. $a^{\sqrt{2}}$ ಮುಂತಾಗಿ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಘಾತಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಆದರೆ ಇದು ಇನ್ನೂ ಕಷ್ಟವಾದ ಇತರ ಭಾವನೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಚಾರವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

೧೧. ಈ ಮೂಲತತ್ವಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಬೀಜಗಣಿತವು ಬೆಳೆದು ಅನೇಕ ಶಾಖೋಪಶಾಖೆಗಳಾಗಿ ಪ್ರಸರಿಸಿದೆ. ಇವುಗ

ಳಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Theory of Equations) ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಗಣಿತ (Theory of Numbers) ಎಂಬ ಎರಡು ಶಾಖೆಗಳ ವಿಷಯವಾಗಿ ಒಂದೆರಡು ಮಾತುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷೇಪ ವಿವರಣೆಯಿಂದ ಈ ಶಾಖೆಗಳ ಸ್ವರೂಪದ ಅಭಿಪ್ರಾಯವು ತಕ್ಕ ಮಟ್ಟಿಗೂ ಬರುವುದಿಲ್ಲವಾದರೂ, ವಾಚಕರಿಗೆ ಮನೋರಂಜಕವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವಂತಹ ಒಂದೆರಡು ವಿಷಯಗಳಿರಬಹುದೆಂದು ನಂಬುತ್ತೇವೆ.

೧೨. **ಸಮೀಕರಣಗಳು**. ಸಮೀಕರಣ ಎಂದರೆ ಸಮಮಾಡುವುದು ಎಂದರ್ಥ. $x^2=4$, ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಏನು, ಅಥವಾ x ನಯಾವ ಬೆಲಿಗೆ x^2 ಎಂಬುದು 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ ? ಇದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು $+2$ ಅಥವಾ -2 ಆಗಬೇಕು. ಈ ಅಂಕೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು (roots) ಎಂದು ಹೆಸರು.

$x^2-3x+2=0$ ಇದರ ಮೂಲಗಳಾವುವು, ಅಥವಾ x ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, x^2-3x+2 ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಆಗುತ್ತದೆ? ಈಗ $x-1$ ಮತ್ತು $x-2$ ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ, x^2-3x+2 ಬರುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, ಎಂದರೆ $x-1$ ಮತ್ತು $x-2$ ಎಂಬುವು x^2-3x+2 ಎಂಬುದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈಗ x^2-3x+2 ಎಂಬುದು 0 ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x-1$, $x-2$ ಎಂಬುವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾ

ದರೂ ಒಂದು 0 ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, x ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆ 1 ಅಥವಾ 2. ಇವೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಬ್ಬ ರೈತನು ತನ್ನ ಚಚ್ಚೌಕವಾದ ತೋಟ ದಲ್ಲಿ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಹಾಕುವುದಕ್ಕಾಗಿ 340 ಸಸಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡುಬಂದು, ಸಾಲುಸಾಲಾಗಿ ಒಂದೇ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಗಿಡಗಳು ಸಾಲದೆ ಹೋದವು. ಒಂದೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹಾಕಿರಬೇಕು ?

ಒಂದೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ x ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಅವನು ನಟ್ಟಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x = \times (x-3) = x^2 - 3x$ ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 - 3x = 340$ ಅಥವಾ $x^2 - 3x - 340 = 0$. ಇದಕ್ಕೆ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $17 \times 20 = 340$ ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ಅಂದಾಜಿನಿಂದ $(x+17)$ $(x-20) = x^2 - 3x - 340$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ x ಎಂಬುದು -17 ಅಥವಾ 20 ಆಗಿರಬಹುದು. ಪ್ರಕೃತ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, -17 ಗಿಡಗಳು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 20.

ಕೆಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯು ಬೇಕಾದರೆ, ಊಹಾಜನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆವಶ್ಯಕ. ಉದಾಹರಣೆ : $x^2 = -1$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ. ಇದಕ್ಕೆ $x = i$ (ಅಥವಾ $-i$) ಎಂಬುದು ಮೂಲವೆಂದು § ೮ ರಿಂದ ತಿಳಿಯು ತ್ತದೆ. ಊಹಾಜನ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಗೆ ಮೂಲಕಾರಣವೇ ಇದು, ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಮೂಲಗಳಿದ್ದೇ ಇರಬೇಕು

ಎಂದು ಸಿದ್ಧಾಂತಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಊಹಾಜನ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು.

೧೩. **ಸಂಖ್ಯಾಗಣಿತ.** ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಶಾಖೆ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಷಯಗಳು ಕೇವಲ ಬಾಲಭಾಗದವುಗಳಾದರೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾದುವು, ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೊಸಸಂಶೋಧನೆಗಳೆಂದರೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಅಲ್ಪಸ್ವಲ್ಪ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪ್ರಾಯಶಃ ಕೊಡಬಲ್ಲುವು.

(a) ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 5 ಇರತಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ : 5 ರ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 25 ಇಡುವುದು. ಉದಾ: $3\times4=12$ ಆದ್ದರಿಂದ $35\times35=1225$, ಹೀಗೆಯೇ $55^2=(5\times6)\,25=3025$, $65^2=4225$, $125^2=15625$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಕ್ರಮವು ಹೇಗೆ ಬಂತು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ, $x5$ ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, x ಎಂಬುದು ದಶಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಸಂಖ್ಯೆಯಬೆಲೆ $10x+5$. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$(x5)^2=(10x+5)^2=100x^2+100x+25$$
$$=100x(x+1)+25$$
$$=[x(x+1)]25,$$ ($x(x+1)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಶತಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಟ್ಟು).

(b)

$$3^2+4^2=5^2$$
$$5^2+12^2=13^2$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಳುಳ್ಳ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಲ್ಲಿರಾ? ಈಗ,

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ m, n ಎಂಬುವು ಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. $m=2, n=1$ ಆದರೆ $3^2+4^2=5^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $m=3, n=2$ ಆದರೆ $5^2+12^2=13^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $m=5$. $n=4$ ಆದರೆ, $9^2+40^2=41^2$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಮುಂದೆ ತಿಳಿಸುವ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಳಸಂಕೋಚದಿಂದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು (proofs) ವಿವರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(*c*) $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

ಉದಾ: ಒಂದರಿಂದ ನೂರರವರೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $=\frac{1}{2}\times 100\times 101=5050$. ಒಂದರಿಂದ ನೂರರ ವರೆಗಿರುವ ಅಸಮ (odd, ಬೆಸ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ಎಂದರೆ $1+3+5+\ldots+99=50\times 50=2500$.

(*d*) $3+5=2^3$

$7+9+11=3^3$

$13+15+17+19=4^3$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಘನವನ್ನು ಅಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

(*e*) ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ, ಎಂದರೆ ಇನ್ನು ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ (1ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) ಭಾಗಿಸಲಾಗದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ, ಅವಿಭಾಜಕ ಸಂಖ್ಯೆ (prime number) ಎಂದು ಹೆಸರು, ಉದಾ: 3, 5, 7, 11, 41, 101.

p ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜಕಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ,

$[1\cdot2\cdot3\cdots(p-1)]+1$ ಎಂಬುದು p ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆವಿಲ್ಸನ್ನನ ಪ್ರಮೇಯ (Wilson's Theorem) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾ: $p=7$. $(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)+1=721$.

(*f*) p ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜಕಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, n ಎಂಬುದು p ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದಿದ್ದರೆ, $n^{p-1}-1$ ಎಂಬುದು p ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಫರ್ಮಟ್ಟನ ಪ್ರಮೇಯ (Fermat's Theorem) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾ:

$p=3,\ n=8,\quad 8^2-1=63$

$p=5,\ n=4,\quad 4^4-1=255$

(g) ಯಾವ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ : $16=5+11$, $150=103+47$, $102=1+101$. ಇದಕ್ಕೆ ಗೋಲ್ಡ್ ಬಾಕನ ಪ್ರಮೇಯ (Goldbach's Theorem) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದಕ್ಕೆ ನಿಖರವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇದುವರೆಗೂ ಯಾರೂ ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಲಕ್ಷಾಂತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷೆಮಾಡಿ ನೋಡಿದ್ದಾರೆ, ಪ್ರಮೇಯವು ತಪ್ಪು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ದೃಷ್ಟಾಂತ ಸಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಲಕ್ಷಾಂತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷೆಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾವ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ $2n$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಕೂಡ, ಪ್ರಮೇಯವು ನಿಜ ಎಂದು ತೋರಬೇಕು.

೧೪. ಬೀಜಗಣಿತವು ಅಂಕಗಣಿತದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಉತ್ಪತ್ತಿಹೊಂದಿ, " ವಿಸ್ತರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ " ಎಂದು ಹೆಸರು ಪಡೆಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯಿತು. ಆದರೆ, ಈ ಬೆಳವಣಿಗೆಯು ಎಲ್ಲೋ ವಿಸ್ತಾರಿಹೋಗಿ, ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೂ ಬೀಜಗಣಿತದ ಶಾಖೋಪಶಾಖೆಗಳಿಗೂ ಈಗ ಯಾವ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗಲಿ ಬಾಂಧವ್ಯವಾಗಲಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಶಾಖೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಬೀಜಗಣಿತದ ಆಧಿಪತ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸದೆ ಸ್ವತಂತ್ರರಾಷ್ಟ್ರಗಳನ್ನಾಗಿಯೇ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಶಾಖೆಗೆ ಮೂಲಾಧಾರವಾದ ಒಂದು ಭಾವನೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವೆವು.

---

೩. ಕೆಲವು ಅನಂತಕ್ರಿಯೆಗಳು

(Infinite Processes)

೧೫. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಬರೆದಿರತಕ್ಕ ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ **ಸರಣಿ** (Sequence) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಬಂದು, ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ. 'ಸೊನ್ನೆ' ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಹೋದರೂ ಸಿಕ್ಕುವುದಿಲ್ಲ; ಆದರೂ ಸೊನ್ನೆಗೂ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಕ್ಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೆ ಅಷ್ಟು ಕಡಮೆಯಾಗುವಂತೆ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಥಾನವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸ ಬಹುದು. ಉದಾ : ಸರಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{1000}$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲಿನ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ, ಮೊದಲಿನ ಲಕ್ಷ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಟ್ಟರೆ, ಮುಂದೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗ ಳೆಲ್ಲಾ $\frac{1}{100000}$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಅಭಿಪ್ರಾ ಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷವಾದ ಹೆಸರು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಸರಣಿಯ ಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು " **ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸೇರುತ್ತವೆ** "

ಅಥವಾ "**ಸರಣಿಯ ಪರಮಾವಧಿ** (limit) ಅಥವಾ **ಅಂತ್ಯಬೆಲೆ** (limiting value) = **ಸೊನ್ನೆ**" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಹೋದರೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಮುಂದೆ ಹೋದಹಾಗೆಲ್ಲ ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ 1ಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸರಣಿಯ ಪರಮಾವಧಿ = 1. ಮೂರನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡವು ಬೇಕಾದರೂ ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸರಣಿಯ ಪರಮಾವಧಿಯನ್ನು ಅನಂತ (infinity) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಮಾವಧಿಯು ಒಂದು ನಿಖರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇಂತಹ ಸರಣಿಗಳನ್ನು **ನಿಖರಾವಧಿ ಸರಣಿಗಳು** (Convergent Sequences) ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಮೂರನೆಯ ಸರಣಿಯನ್ನು **ಅನಂತಗಮ್ಯ ಸರಣಿ** (Divergent sequence) ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

೧೬. ಸರಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿಯೂ ಅನವರತವಾಗಿಯೂ ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು. ಉದಾ :

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ (ಅನಂತವಾಗಿ)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ (ಅನಂತವಾಗಿ)

ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನಂತಕೂಟಗಳು (infinite series) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಕೂಟದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಈ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಪರಮಾವಧಿಯಾದಂಥ

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೊತ್ತವು ದೊರಕುವುದೇ, ಎಂಬುದು ಸಹಜ ವಾದ ಮತ್ತು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕೂಡಿದರೂ ಕೂಡ, ಮೊತ್ತವು 2 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚುಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಹಾಗೆಲ್ಲಾ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ೨ ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, "ಈ ಅನಂತಕೂಟದ ಮೊತ್ತ $=2$" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ವಾಚಕರಿಗೆ ಈ ವಿಷಯವು ಮನಗಾಣುವಂತೆ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕನಿದರ್ಶನವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ದೇವಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಪೂಜೆಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಎರಡು ತೆಂಗಿನಕಾಯಿ ಹೋಳುಗಳನ್ನು ತೆಗದುಕೊಂಡು ಬರುತ್ತಾ ಇದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರಾಗಿ ನಿಮ್ಮನ್ನು ಪ್ರಸಾದ ಕೇಳುತ್ತಾರೆಂದೂ, ನೀವು ಪ್ರತಿ ಒಬ್ಬರಿಗೂ ನಿಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿ ರತಕ್ಕ ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಭಾಗವನ್ನುಕೊಡುತ್ತೀರೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯವನಿಗೆ ಒಂದು ಇಡೀ ಹೋಳು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯವನಿಗೆ ನಿಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಹೋಳಿನ ಅರ್ಧಪಾಲು ಹೋಗಿ, ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಧ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಮೂರನೆಯವನಿಗೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ, ಎಂದರೆ ಹೋಳಿನ ಕಾಲುಪಾಲು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ನಾಲ್ಕನೆಯವನಿಗೆ $\frac{1}{8}$ ಪಾಲು, ಐದನೆಯವನಿಗೆ $\frac{1}{16}$ ಪಾಲು, ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ವಿಭಾಗವು ಅನಂತವಾಗಿ ನಡೆದುಬಂದಂತೆ ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಎಂದರೆ ಒಬ್ಬರಾದಮೇಲೆ ಒಬ್ಬರು ಬಂದು ಕೇಳುತ್ತಾರೆಂದೂ, ನೀವು ಯಾವುದೋ ವಿಧಾನದಿಂದ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಧಭಾಗಮಾಡಬಲ್ಲಿರಿ

ಎಂದೂ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ. [ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಅನಂತವಾಗಲಾರದು, ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಪಂಚದ ಜನರೆಲ್ಲಾ ಬಂದರೂ, ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಕ್ಲಿಪ್ತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ, ಪ್ರಪಂಚದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತವಾಗಲಾರದು; ಆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಅನಂತಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಊಹೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು]. ಆದ್ದರಿಂದ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ಮುಂತಾದ ಭಾಗಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿ ಒಂದು ಹೋಳಾಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ ಅನಂತವಾಗಿ$=2$.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮಾದರಿಯೇ ಬೇರೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಮೊತ್ತವು ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಿ, ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಮೀರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಕೂಟವನ್ನು **ನಿಖರಾವಧಿಕೂಟ** (convergent series) ಎಂದೂ ಎರಡನೆಯ ಕೂಟವನ್ನು **ಅನಂತಗಮ್ಯಕೂಟ** (divergent series) ಎಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಕೂಟವು ಅನಂತಗಮ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಬರುವುದರಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{2}{4}$ ಅಥವಾ $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, ಎರಡನೆಯ ಆವರಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{4}{8}$ ಅಥವಾ $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಆವರಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು ಕೂಟದ ಮೊತ್ತವು

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ . . . . (ಅನಂತವಾಗಿ)

ಎಂಬುದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಆವರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾವಿರ, ಲಕ್ಷ, ಮುಂತಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆಲ್ಲಾ, ಮೊತ್ತವೂ ಅನಂತವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಬಾರಿ ಒತ್ತಿಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಟದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಕ್ಲಿಪ್ತಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (2) ಮೀರಲಾರದು, ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವು ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಲಿಪ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಮೀರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಮಾದರಿಯ ಕೂಟವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

$1-1+1-1+1$ · · · · · · (ಅನಂತವಾಗಿ)

ಇದರಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, 1 ಅಥವಾ 0 ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಅಥವಾ ಏಕಾಂತರವಾಗಿ (alternately) ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾದ ಕೂಟವನ್ನು **ಆಂದೋಳಕ ಕೂಟ** (oscillatory series) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಕೂಟಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ನಿಖರಾವಧಿಕೂಟಗಳೇ ಪ್ರಧಾನವಾದುವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೇ ಇದೆ. ಆದರೂ ಅನಂತಗಮ್ಯಕೂಟಗಳನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸುವಹಾಗಿಲ್ಲ, ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಉನ್ನತ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಕೂಟಗಳೂ ಕೂಡ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

೧೭. **ಪರಿವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳು (Recurring Decimals)**. ಈ ಹೆಸರುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅನಂತ ಕೂಟಗಳು. 0·3333 · · · · ಎಂಬುದನ್ನು $0.\dot{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, $0.\dot{3}\dot{7} = 0.373737 \ldots$; $0.123 = 0.123123123 \ldots$; ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$0.\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$ ಅನಂತವಾಗಿ

$0.37 = \frac{37}{100} + \frac{37}{100,00} + \frac{37}{100,00,00} + \cdots$

ಪರಿವರ್ತಕದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವಿಕೆ ಎಂಬುದೂ ಈ ಕೂಟಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆಯೂ ಒಂದೇ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಕೂಟಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಪರಿವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ನಿಯಮಗಳು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಧಾನವು

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ಎಂಬ ಅನಂತಕೂಟದ ಮೊತ್ತದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಈ ಕೂಟವನ್ನು $1-x$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ \quad - x - x^2 - x^3 - \cdots \\ \hline = 1 \end{array} \;;$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ *

* x ಎಂಬುದು -1 ಮತ್ತು $+1$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಕೂಟವು ಅನಂತಗಮ್ಯವಾಗಿ, ಮೇಲಿನ ಗಣಿತವು ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ $0.\dot{3} = \frac{3}{10}(1+x+x^2+\cdots)$, ಇಲ್ಲಿ $x = \frac{1}{10}$

$$= \frac{3}{10}/(1-\frac{1}{10}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$0.\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{100}(1+x+x^2+\cdots)$, ಇಲ್ಲಿ $x = \frac{1}{100}$

$$= \frac{37}{100}/(1-\frac{1}{100}) = \frac{37}{99},$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

೧೮. ಲೇವಾದೇವಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎಂಬ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾದ ಅಥವಾ ನೈಜವಾದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪ್ರಾಯಶಃ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ, ಈ ಕ್ರಮವು ಒಂದು ಪರಮಾವಧಿ ಕ್ರಿಯೆ (limiting process)ಯಾಗಿದೆ. ಇದರ ವಿವರಣೆಯು ಪರಮಾವಧಿ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಸಹಾಯವಾಗಬಹುದು.

ನೂರು ರೂಪಾಯಿಗಳ ಅಸಲನ್ನು ಶೇಕಡ 5 ರಂತೆ ಬಡ್ಡಿ ಕೊಡತಕ್ಕ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದುವರ್ಷಕಾಲ ಇಟ್ಟರೆ, ಬ್ಯಾಂಕಿನವರು (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ) ಆರು ತಿಂಗಳ ತರುವಾಯ ಆರುತಿಂಗಳಿನ ಬಡ್ಡಿಯಾದ $2\frac{1}{2}$ ರೂ. ನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ, ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $102\frac{1}{2}$ ರೂ. ಗೆ ಆರು ತಿಂಗಳಿನ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ, ನೂರು ರೂಪಾಯಿ ಅಸಲಿನ ಮೊತ್ತ

$$102\tfrac{1}{2} \times \frac{102\frac{1}{2}}{100} = 100\left(1+\frac{5/2}{100}\right)^2 \text{ ರೂ.}$$

ಹಣವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಆರು ತಿಂಗಳು ಕಾಲ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲೇ ಇಟ್ಟ

ವ್ಷರ್ಷ, ಆ ವೇಳೆಗೆ ಮೊತ್ತವು $100 \left(1+\frac{5/2}{100}\right)^3$ ರೂ. ಆಗು ತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳು ಕಳೆದನಂತರ ಮೊತ್ತ $= 100 \left(1+\frac{5/2}{100}\right)^4$ ರೂ. ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು **ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ** (Compound Interest) ಎಂದು ವಾಡಿಕೆಯಾಗಿ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ, ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಬರುವ ಬಡ್ಡಿಗಿಂತ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬಡ್ಡಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವ ವಾಗಿ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಬಹಳಮಟ್ಟಿಗೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯ ಕ್ರಮವೇ ವ್ಯಾಪಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆರು ತಿಂಗಳ ತರು ವಾಯ, 2½ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ್ದೇವೆ, ಎಂದರೆ ಮೊದಲು ಆರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರವೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅಸಲಾ ಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಎರಡನೆಯ ಆರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಮಧ್ಯಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ, ಈ ಬಡ್ಡಿಗೂ ಬಡ್ಡಿಯು ಬೆಳೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಈ ದೋಷ ವನ್ನು (ಸಾಲಕೊಡುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಈ ಉದಾರತೆಯನ್ನು) ಕಡಮೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಆರು ತಿಂಗಳಿಗೊಂದಾ ವರ್ತಿ ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರ ಬದಲಾಗಿ ತಿಂಗಳಿಗೊಂದಾ ವರ್ತಿಯೋ, ಹದಿನೈದು ದಿನಗಳಿಗೊಂದುಸಲವೋ, ಅಥವಾ ದಿನಕ್ಕೊಂದುಸಲವೋ ಸೇರಿಸಬಹುದು. ದಿನಕ್ಕೊಂದುಸಲ ಸೇರಿಸಿದಾಗಲೂ ಕೂಡ, ಒಂದು ದಿನದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ ಬೆಳಗಿನಿಂದ ಮರುದಿನದ ಬೆಳಗಿನತನಕ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮಾತ್ರ

ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಇಷ್ಟು ದೋಷವೂ ಕೂಡದು, ಅಥವಾ ಸಾಲಕೊಟ್ಟವನಿಗೆ ಇಷ್ಟರಮಟ್ಟಿನ ದಾಕ್ಷಿಣ್ಯವೂ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಹಣವನ್ನಿಟ್ಟ, ಅಥವಾ ಸಾಲ ಕೊಟ್ಟ, ಮರುಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೇ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಅಸಲಿನಜತೆಗೆ, ಈ ಬಡ್ಡಿಯೂ ಕೂಡ, ಅದು ಎಷ್ಟೇ ಸ್ವಲ್ಪವಾಗಿರಲಿ, ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸಂಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೂ (ಕ್ಷಣ ಎಂದರೆ, ಒಂದು ಸೆಕಂಡ್ ಎಂದಾಗಲಿ, ಯಾವುದೇ ಕ್ಲಿಪ್ತಕಾಲಾವಧಿಯಾಗಲಿ ಅಲ್ಲ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸತಕ್ಕ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೆ ಅಷ್ಟು ಅಲ್ಪವಾಗತಕ್ಕ ಕಾಲ— ಇದೂ ಒಂದು ಪರಮಾವಧಿ ಭಾವನೆ) ಅಸಲಿನ ಜತೆಗೆ ಅದುವರೆಗೆ ಆಗಿರುವ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು. ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ, ಕೊಟ್ಟ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ (ಒಂದುವರ್ಷ, ಎರಡುವರ್ಷ ಇತ್ಯಾದಿ) ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅದು ನಿಖರವಾದ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವವಾದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಕ್ರಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಇಂಥ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ? ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರಮಾಡಿ ನೋಡಿ. ಒಂದು ವರ್ಷವನ್ನು ಎರಡುಭಾಗ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಭಾಗದ ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ವರ್ಷದ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವು $100\left(1+\frac{5/2}{100}\right)^2$ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವರ್ಷವನ್ನು n ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಭಾಗದ ಕಡೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ

ದರೆ, ಮೊತ್ತವು $100\left(1+\frac{5/n}{100}\right)^n$ ರೂ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ n ಎಂಬುದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಿ, ಅನಂತವಾದರೆ, ನಮ್ಮ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ನೂರು ರೂಪಾಯಿಗಳ ಅಸಲಿಗೆ, ಶೇ. 5 ರಂತೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದು ವರ್ಷವಾದ ಮೇಲೆ ಮೊತ್ತವು $100\left(1+\frac{5/n}{100}\right)^n$ ಎಂಬ ಸರಣಿಯ ಪರಮಾವಧಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಮೊತ್ತ}=\lim_{n\to\infty} 100\left(1+\frac{5/n}{100}\right)^n = \text{ಅಂತ್ಯ}_{n\to\infty}\, 100\left(1+\frac{5/n}{100}\right)^n.$$

ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಶೇ. 5 ರ ಬದಲಾಗಿ, ಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, 5ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಕಬಹುದು. ಈ ಪರಮಾವಧಿಯ ವಿಚಾರವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಿತವನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂಬ ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ಕೈಹಾಕದೆ, ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಪರಮಾವಧಿ ಎಂಬ ಭಾವನೆಗೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ವರ್ಣಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆಯೇ ಹೊರತು, ಅದರ ಗಣಿತವನ್ನು ವರ್ಣನಾರೂಪವಾದ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ).

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

ಎಂಬುದೊಂದು ಅನಂತಕೂಟ. ಇದರ ಮೊತ್ತವು 2 ಕ್ಕೂ 3 ಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲಿನ ನಾಲ್ಕಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗ

ಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, ಇವರ ಬೆಲೆಯು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ 2.71828 . . . . ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಇದು, ಎಂದರೆ ಈ ಕೂಟದ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದಲೇ ಆಗಲಿ, ಅಥವಾ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೇ ಆಗಲಿ ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಒಂದು ಹೊಸ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು e ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ಎಂಬ ಸರಣಿಯ ಪರಮಾವಧಿಯು e^x ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಣಿತದಿಂದ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ, ಎಂದರೆ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)^x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೊತ್ತವು $100\,e^{5/100}=100\times(2.718\ldots)^{\frac{1}{20}}$ ರೂ. ಇವರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಕೋಷ್ಟಕಗಳ (tables) ಸಹಾಯದಿಂದ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ವಿಧವಾದ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಏನು ಪ್ರಯೋಜನವೆಂದು ವಾಚಕರು ಕೇಳಬಹುದು. ಇಷ್ಟು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ, ಇಷ್ಟು ಶ್ರಮದಿಂದ, ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಏನು? ಒಂದು ವೇಳೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಸೂಲು ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಆಗುತ್ತದೆ! ಗಣಿತದ

ಹೆಗ್ಗುರುತು ಆದರಲ್ಲಿರುವ ನಿಖರತ್ವ (accuracy). ಅಂಥ ನಿಖರತ್ವದಿಂದ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಜನವುಂಟೇ ಎಂಬುದು ಬೇರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುವವನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಗಮನಕೊಡಬೇಕಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ನಿಖರತ್ವವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದೇ ಅವನ ಉದ್ದೇಶ, ಈ ನಿಖರತ್ವವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಈ ನಿಖರತ್ವವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಆಕಾಂಕ್ಷೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಬೆಳೆಯಲಾರದು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಮರ್ಯಾದೆಯೂ ಸಲ್ಲಲಾರದು.

---

೪. ರೇಖಾಗಣಿತ

೧೯. ನಾವು ನೋಡುವ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿಗೂ ಆಕಾರವಿದೆ. ಈ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮೊದಲಾದುವುಗಳು ಸರಿಯಾದ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿದ್ದುಕೊಂಡು, ಆಕಾರದ ಸುತ್ತುಕಟ್ಟು (contour) ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ರೇಖೆಗಳೋಪಾದಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಕಾರವು ಸುಂದರವಾಗಿದೆ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತೇವೆ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ವಿಕಾರವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸೂರ್ಯನ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಚಂದ್ರನ ದುಂಡಾದ ಆಕೃತಿಗಳು ನಮಗೆ ಆನಂದವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ಒಂದು ರಸ್ತೆಯು ಸ್ವಲ್ಪವೂ ಡೊಂಕಿಲ್ಲದೆ ನೇರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಶ್ಲಾಘಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ, ಪ್ರಕೃತಿಸೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲೇ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಅಡಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರಕೃತಿಸೌಂದರ್ಯಕ್ಕೆ ರೇಖಾ

ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳು ಸಹಾಯಕಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕಗಳಾಗಿವೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಒಂದು ಜಮೀನನ್ನು ವಿಭಾಗಮಾಡುವಿಕೆ, ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕಿರುವ ದೂರ, ದಿಕ್ಕು, ಎತ್ತರ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಿಕೆ, ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಿಕೆ, ಇವೇ ಮುಂತಾದ ನಾನಾ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಯಾವ ಮೂಲಭಾವನೆಗಳ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ, ಯಾವ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಮೂಲಕ ಬೆಳೆಯಿತು ಎಂಬ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನೋ ಒಂದು ಕೊಠಡಿಯ ಗೋಡೆಗಳನ್ನೋ ಕುರಿತು ನೋಡಿದರೆ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಥವಾ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ, ಎರಡು ಮೇಲ್ಮೈಗಳು (ಉದಾ : ಎರಡು ಗೋಡೆಗಳು) ಸೇರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ, ಮೂರು ಮೇಲ್ಮೈಗಳು (ಉದಾ : ಎರಡು ಗೋಡೆಗಳೂ ಕೊಠಡಿಯ ನೆಲವೂ) ಸೇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು, ಎಂಬುದಾಗಿ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಮೇಲ್ಮೈ (point, line, surface) ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿರ ತಕ್ಕ ಹೆಸರುಗಳು ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಮೂಲಸ್ವರೂಪಗಳನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನೂ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲು ಯೋಚಿಸಬೇಕು.

ಬಿಂದುವಿಗೆ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ದಪ್ಪ ಯಾವುವೂ ಇರಕೂಡದು. ರೇಖೆಗೆ ಉದ್ದ ಮಾತ್ರ ಇರಬೇಕು, ಅಗಲ, ದಪ್ಪ ಇವು ಇರಕೂಡದು. ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ದಪ್ಪವಿಲ್ಲ. ಈ ಗುಣಗಳುಳ್ಳ ವಸ್ತುಗಳು ನಮಗೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ. ಎಷ್ಟೇ ಮೊನಚಾದ

ಸೂಜಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟೇ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿದರೂ, ಗುರುತಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಗಲವೂ ಆಳವೂ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಷ್ಟೇ ತೆಳುವಾದ ಕಾಗದವಾದರೂ, ಸ್ವಲ್ಪವಾದರೂ ದಪ್ಪವಿದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ, ರೇಖಾಗಣಿತದ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮುಂತಾದುವು ಪರಮಾವಧಿ ಭಾವನೆಗಳು (limiting concepts) ಎಂಬುದನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಪರಮಾವಧಿ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ಭಾವನೆಗೆ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಮೇಲ್ಮೈ ಎಂಬುವು ಇನ್ನೂ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ. ಒಂದು ಪದಾರ್ಥದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ದಪ್ಪ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನವರತವಾಗಿ ಚಿಕ್ಕದುಮಾಡುತ್ತಾ ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವು ಫಲಿಸುತ್ತದೆ. ಹತ್ತಿಯ ನೂಲನ್ನೋ ತೆಳುವಾದ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನೋ ತಕ್ಕ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯುತ್ತಾಹೋದರೆ, ದಪ್ಪವು ಕ್ರಮೇಣ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದ, ದಪ್ಪವನ್ನು ಒಂದು ಮಿತಿಯವರೆಗೂ ಕಡಮೆಮಾಡಬಹುದು, ಆದರೆ ಅನವರತವಾಗಿ ಈ ಕಾರ್ಯವು ನಡೆಯಬಹುದೆಂದು ನಾವು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ದಪ್ಪವೂ ಅಗಲವೂ ನಶಿಸಿಹೋಗಿ, ರೇಖೆಯು ಫಲಿಸುವುದು.

ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ದಪ್ಪ ಇವುಗಳನ್ನು ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳು (dimensions) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಬಿಂದುವು ಪರಿಮಾಣವಿಲ್ಲದ್ದು, ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವಿದೆ, ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳು. ನಾವು ವಾಸಿಸುವ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳುಳ್ಳ ಪ್ರಪಂಚವೆಂದು

ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಾಲ್ಕು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪರಿಮಾಣಗಳುಳ್ಳ ಪ್ರಪಂಚಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಊಹಾಶಕ್ತಿಯಿಂದ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಂಥ ಪ್ರಪಂಚಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ರೇಖಾಗಣಿತವೂ ಕೂಡ ಪ್ರಯೋಜನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರುತ್ತದೆ.

೨೦. **ರೇಖೆ**(curve), **ಮೇಲ್ಮೈ** (surface)ಎಂಬುವು ಯಾವ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಇರಬಹುದು. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಹಾಗೆ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅತ್ಯಂತ ಹ್ರಸ್ವವಾದುದು ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ವಭಾವಸಿದ್ಧವಾದ ಭಾವನೆ. ಈ ಹ್ರಸ್ವರೇಖೆಗೆ **ಸರಳರೇಖೆ** (straight line) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಮುಖ್ಯ ಗುಣವಿದೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲ್ಮೈ (ಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದೂ ಹೆಸರುಂಟು) ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಪದಾರ್ಥದ ಹೊರ ಆಕೃತಿಯಾಗಬಹುದು. ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾದ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ **ತಳ** ಅಥವಾ **ಸರಳಕ್ಷೇತ್ರ** (plane) ಎಂದು ಹೆಸರು, ಉದಾ. ಗೋಡೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ. ತಳದ ಲಕ್ಷಣವೇನೆಂದರೆ, ತಳದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತಳದ ಮೇಲೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ವಾಚಕರು ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆಯೂ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲೆಯೂ ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇವೆಲ್ಲಾ ಮೂಲಭೂತವಾದ (fundamental) ಭಾವನೆ

ಗಳು. ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಭಾವಜನಕವಾದುವು ಅಥವಾ ದೈವದತ್ತವಾದುವು ಎಂದು ಭಾವಿಸುವಂತೆಯೇ ಇವೂ ಕೂಡ ದೈವದತ್ತವಾದ ಭಾವನೆಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇಂಥ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಮೇಲ್ಮೈಗಳಿಗೂ ಸೇರಿರುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಇರುತ್ತದೆ, ಅಥವಾ ಎರಡು ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ (Two surfaces intersect along a curve). ಎರಡು ಸಮತಳ ರೇಖೆಗಳು ಇದೇ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಎರಡು ತಳಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ, ಒಂದೇ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಯಾವ ವಿಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರವೇ ಆಗಲಿ ಕೆಲವು ಮೂಲಸೂತ್ರಗಳಿಂದಲೂ (definitions) ಭಾವನೆಗಳಿಂದಲೂ ಆರಂಭವಾಗಬೇಕು. ಇಂಥ ಆರಂಭ ಭಾವನೆಗಳು ಯಾವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗೂ ಒಳಪಡಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಗೆ ಸ್ವಭಾವವಾಗಿ ತೋರತಕ್ಕವುಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಯಾವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನಾದರೂ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ; ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಬೇಕಾದರೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಈ ವಿಶೇಷ ಭಾವನೆಗಳ ಜತೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಗೆ ಸ್ವಭಾವಸಿದ್ಧವೆಂದು ತೋರುವ, ಅಥವಾ ತರ್ಕವಿಲ್ಲದೆ ನಿಜಾಂಶಗಳು ಎಂದು ಒಪ್ಪಬಹುದಾದಂಥ ಕೆಲವು ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ (axioms) ಬೇಕು. ಉದಾ. A ಎಂಬುದು B ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, B ಎಂಬುದು C

ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಹೀಗಿದ್ದರೆ A ಎಂಬುದು Cಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.
$A=B$ ಆದರೆ, $A-C=B-C$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಕಡೆ ಒಂದು ಕೋಣವು (ಕೋನವು) ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಒಂದು ಮೂಲ ಭಾವನೆ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆ ಇರುವ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಎಷ್ಟು ತಿರುಗಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೋಣವು (angle) ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಕೋಣವನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಾಚಕರು ತಿಳಿದಿರುತ್ತಾರೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

೨೧. ಈ ಮೂಲಭಾವನೆಗಳೇ ಮುಂತಾದುವುಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ರೇಖಾಗಣಿತವು ಯಾವ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಪರ್ಯಾಲೋಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ತಿಳಿಯೋಣ. ಮೊದಲು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡೋಣ. ಮೊದಲನೆಯದು ಒಂದೇ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ವಿಚಾರಮಾಡುವ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಇದನ್ನು ಸಮತಳ ರೇಖಾಗಣಿತ (plane geometry) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿಲ್ಲದೆ ಇರುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಮೇಲ್ಮೈಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸತಕ್ಕ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಘನರೇಖಾಗಣಿತ (solid geometry) ಎನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಸಮತಳರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡತಕ್ಕ ವಿಷಯಗಳ ಪೈಕಿ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ವೃತ್ತಗಳು ಮೊದಲಾದುವು ಸುಲಭವಾದುವು. ಅನೇಕ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಗುಣಗಳ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಹೇರಳವಾಗಿ ಶೋಧನೆಗಳು ನಡೆಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಘನರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತಳಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ, ಗೋಳ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂದರ,

ವುುಂತಾದ ಘನಪದಾರ್ಥಗಳೂ ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಬಹು ದಾದ ರೇಖೆಗಳೂ ಚರ್ಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ

ಈ ಎರಡು ರೇಖಾಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳೂ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದ ಬೆಳೆದು ಬಂದಿವೆ. ಯಾವ ಯಾವ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಷಯ ಗಳು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟವು ಎಂಬ ಚರಿತ್ರೆಯ ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ನಾವು ಕೈ ಹಾಕುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದ ವಿಷಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಶೇಖರಿಸಿ ಒಂದು ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ತಂದು ಬರೆದಿಟ್ಟು ಲೋಕೋಪಕಾರ ಮಾಡಿದವನು ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ವನಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ (Euclid, 323-284 B.C.) ಎಂಬಾತನು. ಇತ್ತೀಚಿನ ವರೆಗೂ ಅವನು ಬರೆದಿಟ್ಟ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಭಾಷಾಂತರ ಗಳೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಮೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆ ಭಾವಿಸಲ್ಪಡು ತ್ತಿದ್ದುವು. ಈಚೀಚೆಗೆ ಅವನು ಅನುಸರಿಸಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲೂ ತರ್ಕ ದಲ್ಲೂ ಕೆಲವು ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿ ಕಂಡು ಬಂದಿದ್ದರೂ, ಈಗಲೂ ಕೂಡ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಅವನ ಪುಸ್ತಕ ಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಬರುವ ಮಾರ್ಗವೇ ರೇಖಾಗಣಿತದ ವ್ಯಾಸಂಗಕ್ಕೆ ತಳಹದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಸಂಗವು ಮೊದಲು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸೇರತಕ್ಕ ಕೋಣಗಳ ವಿಷಯವಾಗಿ ಆರಂಭವಾಗಿ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಅಥವಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣಗಳ (properties of triangles) ವಿಷಯವಾಗಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳು (theorems) ಸಾಧಿಸ ಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭ ಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಎಂದರೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ ಎರಡೂ ಕೂಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು

ಒಂದು ವಿಚಾರ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳೂ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಕೋಣವೂ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೂ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಕೋಣಕ್ಕೂ ಸಮ ನಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಹು ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ, ಎಂದರೆ ಅವುಗಳ ಕೋಣಗಳೂ ಸಹ ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದರೇನು, ಸಾಧನೆ ಎಂದರೇನು ಎಂದು ಎರಡು ಮಾತು ಗಳನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದರೆ ನಿಜಾಂಶ, ಕೆಲವು ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗೊಳಗಾಗಿಯೋ ಅಥವಾ ಯಾವ ನಿರ್ಬಂಧ ಗಳೂ ಇಲ್ಲದೆಯೋ, ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ನಿಜಾಂಶವೆಂದು ತೋರಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳೆಂದು ಹೆಸರು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಹಿಂದೆಯೇ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಿಜಾಂಶಗಳೆಂದು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಲು, ನಮ್ಮ ಮೂಲಭಾವನೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ತರ್ಕಮಾಡುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $AB=AC$ ಆದರೆ, $\hat{C}=\hat{B}$ ಎಂಬುದೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ. $AB=AC$ ಇರುವಂಥ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ, B ಮತ್ತು C ಕೋಣಗಳನ್ನು ಅಳೆದು, ಅವು ಸಮನಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಬಿಟ್ಟರೆ, ಅದು ಸಾಧನೆಯಾಗುವು ದಿಲ್ಲ. ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳನ್ನು ನಾವು ನಂಬುವು ದಿಲ್ಲ, ನಮ್ಮ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ವಿಶ್ವಾಸವಿಲ್ಲ. ತರ್ಕ

(reasoning, argument)ವೊಂದೇ ನಮಗೆ ಆಧಾರ. ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೂಲಭಾವನೆಗಳನ್ನೂ ಹಿಂದೆ ತರ್ಕಿಸಿ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಇತರ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅಳತೆಗೆ ಆಸ್ಪದವಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಧನೆಯು ಅನ್ವಯಿಸುವಂತಿರಬೇಕು.

೨೨. ತ್ರಿಕೋಣದ (ತ್ರಿಭುಜದ) ಮೂರು ಕೋಣಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಎಂಬುದು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯ. ಆದರೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರುವ ವಿಧಾನವು (ತರ್ಕವು) ತಪ್ಪೆಂದೂ, ಸರಿಯಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಈಚೆಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ, ಎಂದರೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯವೇ ತಪ್ಪು ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಲಂಬದೂರವು (perpendicular distance) ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು (parallel lines) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾ: ಮೇಜಿನ ಎದುರುಬದುರು ಅಂಚುಗಳು. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಹೊರಗಡೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನೂ ಇಂಥ ಸಮಾಂತರರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ **ಪ್ಲೇಫೇರನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾಣ** (Playfair's Axiom) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾ

ಣವಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕೇ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಪ್ಲೇಫೇರನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮತ; ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಮ್ಮ ಮೂಲಭಾವನೆಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಕೋಣಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಎಂಬ ವಿಷಯವು ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಅದು ತಪ್ಪು ಎಂದುಬಿಟ್ಟರೆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೋಣಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ 180° ಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಬಹಳ ಸ್ವಲ್ಪ, ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಅದನ್ನು ಅಳೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಹೀಗೆ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೋಣಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಮತೀಯರು ಒಂದು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಕಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ನಾನ್-ಯೂಕ್ಲಿಡಿಯನ್ ಜಾಮಿಟ್ರಿ (Non-Euclidean Geometry) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಿಷಯಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಪ್ಲೇಫೇರನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವೆಂದು ಸ್ವೀಕರಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಮತದ ಪ್ರಕಾರ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೋಣಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟಲ್ಪಟ್ಟ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನು ಇಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದೆ ಹೊರಟು, ಚತುರ್ಭುಜಾಕೃತಿಗಳು, ಅವುಗಳ ವಿಶೇಷಸ್ವರೂಪಗಳಾದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು (parallelograms), ಆಯುಗಳು (rectangles), ಚದರಗಳು (squares) ಮುಂತಾದುವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಇವುಗಳ ಸಲೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಗಳನ್ನು (areas) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುತ್ತಾನೆ. ವಾಚಕರಿಗೆ ಇವೆಲ್ಲಾ ತಿಳಿದ ವಿಷಯಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಇವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿಚಾರಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ.

ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಲು (similar figures) ಯಾವ ಗುಣಗಳಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯ. ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ರೂಪವಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿರಬೇಕು, ಕೋಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಈ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಅದರಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಉದಾ : ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ, AB=2″, BC=3″, AC=4″ ಇದ್ದು, DEF ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ DE=4″, EF=6″, FD=8″ ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳೂ ಸಾಮ್ಯರೂಪತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತವೆ. A, B, C, ಎಂಬ ಕೋಣಗಳು D, E, F ಕೋಣಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗುತ್ತವೆ. DEF ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ದೊಡ್ಡ "ಸೈಜಿನ" ಚಿತ್ರ ಎನ್ನಬಹುದು. ಒಂದು ಫೋಟೋವನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸೈಜಿಗೋ ಚಿಕ್ಕ ಸೈಜಿಗೋ ಮಾರ್ಪಡಿಸುವುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವಿಚಾರಮಾಡತಕ್ಕ ವಿಷಯಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶವಲ್ಲ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕುರಿತು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವಾಗ, ರೇಖಾಗಣಿತವು ಏನನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನಾದರೂ ಹೇಳಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು, ಸಾಮ್ಯರೂಪತ್ವ ಮುಂತಾದ

ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನು ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋಣದ ಅಳತೆಯು 90° ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಕೋಣಕ ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಹೆಸರು. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ, $A = 90^\circ$ ಆದರೆ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ ಪ್ರಮೇಯ (Pythagoras's Theorem) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ (conversely), ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ, $\hat{A} = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಈ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದುವು. AB, AC, BC ಬಾಹುಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಸಮಕೋಣತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು §13 (*b*) ಇಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಉದಾ: ಬಾಹುಗಳು 3 ಅಂ, 4 ಅಂ, 5 ಅಂ, ಅಥವಾ 5 ಅಂ, 12 ಅಂ. 13 ಅಂ. ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಕೋಣವು 90° ಇರುತ್ತದೆ.

೨೩. ಇದೆಲ್ಲಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಚಾರವಾದ ಪ್ರಸ್ತಾಪ. ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿಯೂ ಬಹಳಕಾಲದಿಂದಲೂ ಗಣಿತವು ಬೆಳೆದು ಬಂದಿದೆ. ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದುದು ವೃತ್ತ (circle). ವೃತ್ತದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ವೃತ್ತದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು

ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಿಷಯವಾದರೂ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಲಾರದು.

ವೃತ್ತ ಎಂದರೆ, ಒಂದು ಬಿಂದು (ಕೇಂದ್ರ)ವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿ ಇರತಕ್ಕ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ. ಈ ದೂರಕ್ಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ (radius) ಎಂದು ಹೆಸರು. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಅಥವಾ ಸುತ್ತಳತೆಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಒಂದು ಅನುಪಾತ (ratio) ಇದೆ, ಎಂದರೆ ಯಾವ ವೃತ್ತವೇ ಆಗಲಿ, ಸುತ್ತಳತೆ÷ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂಬುದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದನ್ನು

$$\frac{\text{ಪರಿಧಿ}}{\text{ತ್ರಿಜ್ಯ}} = 2\pi$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. π (ಪೈ) ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಈ ಗುಣದಿಂದ ಹುಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿಶೇಷಗಣಿತವು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಅನಂತ ಕೂಟಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾ:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, $\pi = \frac{22}{7}$, $\pi = \frac{355}{113}$, $\pi = 3{\cdot}1416$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ e ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ ಆದರೆ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾದರಿಯಲ್ಲವೆಂದೂ ತಿಳಿಸಿದೆ. π ಎಂಬುದಕ್ಕೂ ಈ ಮಾತುಗಳು ಸಲ್ಲುವುವು. ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಸಮೀಕರ**

ಅಸಾಧಾರಣ ಅಥವಾ ಸಮೀಕರಣಾತೀತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (transcendental numbers) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

೨೪. ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದುವು ಒಂದು ಶಂಕು (cone, ಸಕ್ಕರೆ ಪೊಟ್ಟದ ಆಕೃತಿ) ವಿನ ಛೇದನೆಯಿಂದ ದೊರೆಯತಕ್ಕ ರೇಖೆಗಳು. ಶಂಕುವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತಳಗಳಿಂದ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಪ್ಯಾರಾಬೊಲ (parabola), ದೀರ್ಘವೃತ್ತ (ellipse), ಹೈಪರ್‌ಬೊಲ (hyperbola) ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಶಂಕುಜ (conics) ಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. "ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಪ್ರವೇಶ" * ದಲ್ಲಿ ಧೂಮಕೇತುಗಳು ಚಲಿಸತಕ್ಕ ಪಥಗಳು ಈ ರೇಖೆಗಳ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸೂಚಿತವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ದುಂಡಾದ ತಟ್ಟೆಯನ್ನು ದೀಪಕ್ಕೆ ಅಡ್ಡಲಾಗಿಟ್ಟರೆ, ನೆಲದಮೇಲೆ ಬರುವ ಛಾಯೆಯು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಶಂಕುಜಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡುವುದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಶಾಖೆ.

ಶಂಕುಜಗಳೇ ಮೊದಲಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಮಾರ್ಗಗಳು ಸಾಲವು. ಅನೇಕ ಹೊಸ ವಿಧಾನಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ (algebraic geometry) ಎಂಬುದರ ವಿಷಯವಾಗಿ ಎರಡುಮಾತುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಹೆಸರು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ, ಇದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸತಕ್ಕ ಒಂದು ವಿಧಾನ.

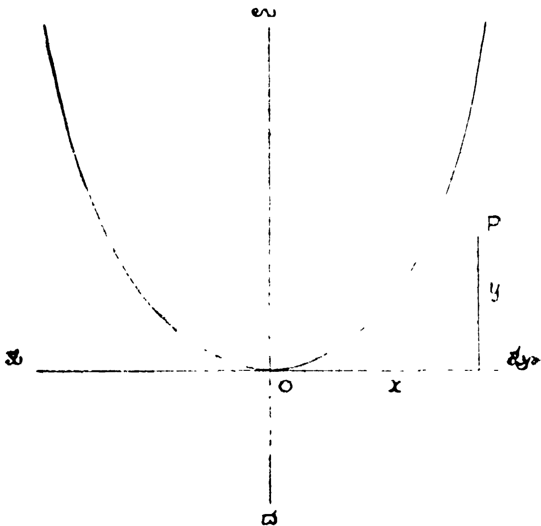
---

* ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಚಾರಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ, ಸಂ. ೧.

O ಎಂಬ ಒಂದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ರೇಖೆಗಳು ತೋರಿಸುವ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ವ ಪಶ್ಚಿಮ, ಉತ್ತರದಕ್ಷಿಣಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವ ಸ್ಥಳಕ್ಕಾದರೂ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಎಷ್ಟು ದೂರ ಪೂರ್ವ (ಅಥವಾ ಪಶ್ಚಿಮ)ಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಆಮೇಲೆ ಎಷ್ಟುದೂರ ಉತ್ತರ (ಅಥವಾ ದಕ್ಷಿಣ) ಕ್ಕೆ ಹೋಗಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಎಂದರೆ, P ಎಂಬುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಾದರೆ, P ಇಂದ ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಇರತಕ್ಕ ಲಂಬದೂರಗಳಿಂದ P ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಬಹುದು. ಈ ದೂರಗಳನ್ನು (**ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು**, coordinates) ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು (x, y) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. x ಎಂಬುದು O ಇಂದ ಪೂರ್ವಕ್ಕಿದ್ದರೆ ಅದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕಿದ್ದರೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ ಸಂಕೇತ. ಹೀಗೆಯೇ y ಎಂಬುದು O ಇಂದ ಉತ್ತರಕ್ಕಿದ್ದರೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆ, ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕಿದ್ದರೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ. OP ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು $\sqrt{x^2+y^2}$ ಎಂದು ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ x, y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸೋಣ. ಉದಾ: $y = x^2$ ಅಥವಾ $y = 2x + 3$ ಅಥವಾ $x^2 + y^2 = 4$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಂಥ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರು

ವಂತೆ x, y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾ : $y=x^2$ ಆದರೆ, $x=0$ ಆದಾಗ $y=0$, $x=1$ ಆದರೆ $y=1$, $x=2$, $y=4$, $x=-2$, $y=4$. ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳುಳ್ಳ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳಮೂಲಕ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $y=x^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಬರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಇದು ಪ್ಯಾರಾಬೊಲ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ರೇಖೆ. $x^2+y^2=4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಬರುವ

ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಉಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $OP^2 = x^2 + y^2$

ಹೀಗೆ x, y ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗೆ ಕೊಡುವ ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೂ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸಂಬಂಧವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ನಾನಾವಿಧವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳೂ ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಘನರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಅದರಿಂದ ಘನಪದಾರ್ಥಗಳ (ಗೋಳ, ಶಂಕು ಮುಂತಾದುವುಗಳ) ಮೇಲ್ಮೈಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳಮೇಲೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ವಿಚಾರಮಾಡಬಹುದು.

ಆಧುನಿಕರೇಖಾಗಣಿತವು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಚಾರಗಳಿಗಿಂತ ಇನ್ನೂ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಾದ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಹಿಸುತ್ತಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, 'ದೂರ' ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವಾದ ಭಾವನೆಯೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವ $OP = \sqrt{x^2+y^2}$ ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಎರಡು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪವರ್ತಿಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ 'ದೂರ' ವನ್ನು ನಮಗೆ ಇಷ್ಟಬಂದಂತಹ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಈ ನಿರ್ಧಾರದಿಂದ ಹೊರಟು, ಒಂದು 'ರೇಖಾಗಣಿತ' ವನ್ನು ಕಟ್ಟಬಹುದು. ಐನ್‌ಸ್ಟೈನಿನ ಸಾಪೇಕ್ಷ

ಸಿದ್ಧಾಂತ (Einstein's Theory of Relativity) ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಇಂಥ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿ ಕಂಡು ಬಂದಿದೆ

---

೫. ಉಪಸಂಹಾರ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲೂ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲೂ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಕೊಡತಕ್ಕ ವಿಷಯಗಳು ಎರಡು—ತರ್ಕಪೂರಿತವಾದ ವಾದ ಮತ್ತು ನಿಖರತ್ವವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕೆಂಬ ಉದ್ದೇಶ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನಗಳಿಗೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆಗುವ ಪ್ರಯೋಜನಗಳು ಇವುಗಳೇ. ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿಚಾರಮಾಡಲ್ಪಡುವ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರವಾದ ತರ್ಕವನ್ನೂ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ನಿಖರತ್ವವನ್ನೂ ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವುದೇ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಗಣಿತವು ಮಾಡುವಂಥಾ ಸೇವೆ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೂಗರ್ಭಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ವಿಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ಮನಶ್ಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ಸಾಮಾಜಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಕೂಡ, ಗಣಿತದ ಈ ಸೇವೆಯನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಒಂದೊಂದು ವೇಳೆ, ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಶಾಖೆಗಳು ಬೆಳೆದಿವೆ.

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಹೊಸ ಹೊಸ ಮೂಲಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅವನಿಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ತೋರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲ್ಪಿಸುತ್ತಾ ತರ್ಕದ ಮೇಲೆ ಗಮನವಿಟ್ಟು ಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವನು. ಮೂಲಭಾವನೆಗಳು ಜಟಿಲವಾದಷ್ಟೂ ಅವುಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಗಣಿತವೂ ಕಟುವಾಗುವುದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಗಣಿತವು ಅನಂತವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. ಇಂಥ ಗಣಿತ ಶೋಧನೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬೇಕಾದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ, ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಬೆಳೆಯುತ್ತಾ ಹೋಗುವಾಗ, ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೋ ಅದುವರೆಗೂ ಉಪಯೋಗವಾಗದೆ ಇರುವ ಗಣಿತದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳೂ ಸಂಶೋಧನೆಗಳೂ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಆದರೆ ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ಬರಲಾರವು. ಈ ವಿಧವಾದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಗುರಿಯಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿರುವುದೂ ಇಲ್ಲ.

